Développement : Théorème de RUNGE (faible)

ANALYSE & PROBABILITÉS

Référence : [QUE] QUEFFÉLEC H., *Topologie, Cours et exercices corrigés,* **5ème** *édition*, Dunod, 2006, p140.
(Aussi trouvable dans les autres éditions, en particulier dans la **3ème édition** à la page 124)
Pour les leçons :
- 203 : Utilisation de la notion de compacité.
- 204 : Connexité. Exemples et applications.
- 241 : Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.
- 245 : Fonctions holomorphes et méromorphes sur un ouvert de $\mathbb{C}$. Exemples et applications.

Théorème 1. ***Théorème de* RUNGE *(faible).***

Soit $K \subset \mathbb{C}$ un compact de complémentaire connexe.
Alors, pour tout $a \in K^c := \mathbb{C}\backslash K$, la fonction $\varphi_a : z \longmapsto \dfrac{1}{z-a}$ est limite uniforme sur K de polynômes.

PREUVE : Soit $P(K)$ l'adhérence des polynômes dans $(\mathcal{C}(K,\mathbb{C}), \|\cdot\|_{\infty,K})$.
$P(K)$ est stable par somme et par produit : en effet, si $f, g \in P(K)$, on sait que f et g sont limites uniformes de polynômes sur K, notés respectivement $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$, alors $(P_n+Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(P_nQ_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent respectivement vers $f+g$ et fg (pour la norme uniforme sur K).
Montrons que pour tout $a \in K^c$, $\varphi_a \in P(K)$. On pose $A = \{a \in K^c \mid \varphi_a \in P(K)\}$, et montrons que $A = K^c$.

⋆ ÉTAPE 1 : Montrons que A est non vide.
Soit $R = \sup\limits_{z\in K}(|z|)$. R est fini en tant que supremum d'une fonction continue ($|\cdot|$) sur un compact.
Soit $a \in K^c$ tel que $|a| > R$ (en particulier, $a \neq 0$). Pour tout $z \in K$, on a :

$$\begin{aligned}
\varphi_a(z) &= \frac{1}{z-a} \\
&= -\frac{1}{a}\frac{1}{1-\frac{z}{a}} \\
&\overset{\left|\frac{z}{a}\right|<1}{=} -\frac{1}{a}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z}{a}\right)^n \\
&= -\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{a^{n+1}}.
\end{aligned}$$

En outre, $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{z^n}{a^{n+1}}$ est une série de fonctions qui converge normalement sur K. En effet, pour tout $z \in K$:

$$\left|\frac{z^n}{a^{n+1}}\right| < \frac{1}{R}\left(\frac{R}{|a|}\right)^n,$$

et $0 < \dfrac{R}{|a|} < 1$ par hypothèse, donc $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{R}\left(\frac{R}{|a|}\right)^n$ converge.

On pose donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n = -\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{X^k}{a^{k+1}} \in \mathbb{C}[X]$. Alors, pour tout $z \in K$, d'après le travail précédent :

$$|\varphi_a(z) - P_n(z)| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{z^k}{a^{k+1}}\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{R^k}{|a|^{k+1}},$$

et donc :

$$\|\varphi_a - P_n\|_{\infty,K} \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{R^k}{|a|^{k+1}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Donc $\varphi_a \in A$, et A n'est pas vide.

⋆ ÉTAPE 2 : Montrons que A est un fermé de K^c.
Pour cela, on montre que $\bar{A} \cap K^c$ est un fermé de $\mathbb{C}$. Soit $a \in \bar{A} \cap K^c$. On note $d = d(a, K) > 0$ (car sinon, $a \in K$, ce qui est proscrit).

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (A \cap K^c)^{\mathbb{N}}$ qui converge vers a. Montrons que $a \in A$. Quitte à translater $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, comme elle converge vers a, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |a_n - a| \leqslant \frac{d}{2}.$$

Donc, pour tout $z \in K$, on a :

$$\begin{aligned} |\varphi_{a_n}(z) - \varphi_a(z)| &= \left| \frac{1}{z - a_n} - \frac{1}{z - a} \right| \\ &= \frac{|a_n - a|}{|z - a_n||z - a|}, \end{aligned}$$

avec $|z - a| \geqslant d$, puisque $z \in K$ et que $d = d(a, K)$. De plus :

$$|z - a| \leqslant |z - a_n| + |a_n - a|,$$

et donc :

$$|z - a_n| \geqslant |z - a| - |a_n - a| \geqslant d - \frac{d}{2} = \frac{d}{2}.$$

Cela permet d'écrire :

$$|\varphi_{a_n}(z) - \varphi_a(z)| \leqslant \frac{|a_n - a|}{\frac{d}{2} \times d} = \frac{2}{d^2}|a_n - a|,$$

et ce, pour tout $z \in K$. Donc :

$$\|\varphi_{a_n} - \varphi_a\|_{\infty,K} \leqslant \frac{2}{d^2}|a_n - a| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Donc φ_a est limite uniforme de $(\varphi_{a_n})_{n\in\mathbb{N}}$. Or, comme $a_n \in A$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a que $\varphi_{a_n} \in P(K)$ qui est fermé, donc $\varphi_a \in P(K)$. Autrement dit, $a \in A$, ce qui prouve l'assertion souhaitée.

$\star$ <u>ÉTAPE 3 :</u> Montrons que A est un ouvert de K^c.
Pour cela, montrons que $A \cap K^c$ est un ouvert de $\mathbb{C}$. Soient $a \in A$, et on note encore $d = d(a, K) > 0$. Montrons que :

$$\bar{\mathbb{D}}\left(a, \frac{d}{2}\right) \subset A.$$

Soit $h > 0$ tel que $a + h \in \bar{\mathbb{D}}\left(a, \frac{d}{2}\right)$ (i.e. $|h| \leqslant \frac{d}{2}$). Soit $z \in K$. On a $\left|\frac{h}{z-a}\right| \leqslant \frac{\frac{d}{2}}{d} = \frac{1}{2} < 1$, ce qui permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \varphi_{a+h}(z) &= \frac{1}{z - a - h} \\ &= \frac{1}{z - a}\frac{1}{1 - \frac{h}{z-a}} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{h^n}{(z - a)^{n+1}} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} h^n \varphi_a(z)^{n+1}. \end{aligned}$$

Cette série de fonctions converge normalement sur K. En effet, pour $n \in \mathbb{N}$, $\frac{h^n}{(z-a)^{n+1}} \leqslant \frac{\left(\frac{d}{2}\right)^n}{d^{n+1}} = \frac{1}{2^n d}$, qui est le terme d'une série géométrique convergente. En particulier, cette série de fonctions converge uniformément sur K.

Cela signifie que, en notant, pour $N \in \mathbb{N}$, $f_N : z \longmapsto \sum_{n=0}^{N} h^n \varphi_a(z)^{n+1}$, $(f_N)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers φ_{a+h}.

Pourtant, les f_N sont dans $P(K)$, par somme finie d'éléments de $P(K)$. Comme $P(K)$ est fermé pour la convergence uniforme, $\varphi_{a+h} \in P(K)$, ce qui prouve que $a + h \in A$.
Par conséquent, $\mathbb{D}\left(a, \frac{d}{4}\right)$ est un voisinage ouvert de a inclus dans A, pour tout $a \in A$. Cela prouve que A est ouvert.

$\star$ <u>ÉTAPE 4 :</u> Concluons : montrons que $A = K^c$.
A est un ouvert et un fermé de K^c, qui est supposé connexe. Comme il est non vide, $A = K^c$, ce qui achève la preuve. $\square$